1

Шифр: 11-04

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
по математике
2019/2020
Ленинградская область

Район г. Сосновый Бор

Школа МБОУ „СОШ №2"

Класс 11 Б

ФИО Мекрюков Валентин Андреевич

11-04

Олимпиадная работа.

1	2	3	4	5	Σ
7		0		0	7

№1

77 раскладывается на два целых множителя четырьмя способами
$77 = 77 \cdot 1 = 7 \cdot 11 = (-77)\cdot(-1) = (-7)\cdot(-11)$.
При этом все числа не могут лежать только в положит. или только в отрицат. области, т.к. $1 < 7 < \cancel{11}\ 77$ (т.е. произведение 1 и 77 – не произведение наибольших/наименьших чисел).
Рассм. четыре случая.
1) Последовательность $-77; -1; (0); 1; 77$; $n_{max} = 5$;
2) и 3) Последовательности $-77; -1; \dots 7; 11$ и $-11; -7; \dots 1; 77$;
n_{max} достигается, если взять все целые в промежутке „…" и $n_{max} = 11$;
4) Последовательность $-11; -7; \dots 7; 11$; n_{max} (при взятых всех целых из промежутка „…") равно 17. Это наибольшее n_{max} при данных условиях ($17 > 11 > 5$).

Ответ: 17.

№5

Ответ: $\frac{N}{2}(N^2+1)$; Док-во. Пример: $1\ (N+1) \to N^2-N+1$; $2\ (N+2) \to \dots$; $N \dots N^2$.

Очевидно, что 1 будет одним из малых чисел, а N^2 – одним из больших. Тогда $\sum_{\text{больших}} \geq N^2$ и $\sum_{\text{малых}} \geq 1$. Тогда $\Delta\sum \geq N^2 - 1$.
При $N = 2$ перебором получим, что $\Delta\sum_{min} = N^2 - 1 = 3$
При $N = 1$ один вариант: $\Delta\sum_{min} = 0$.

~~Представим $\Delta\sum$ как функцию от N: $f(N) = \alpha(N^2-1) + \gamma N + \beta$ $(\alpha, \beta > 0)$.~~
~~Тогда: $f(2) = 3\alpha + 2\gamma + \beta = 3$~~
~~$f(1) = \gamma + \beta = 0$.~~
~~Отсюда $\alpha = 1$. $3\alpha + \gamma = 3$~~

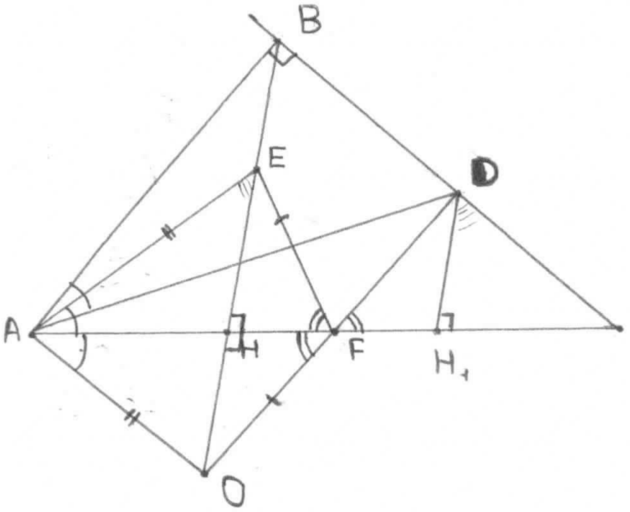
~~Также $\sum_{б.} \le N^3$ и $\sum_{м.} \ge 1 + (N-1)(N^2-N+1)$. Значит,~~

Пример.

1	N + 1	2N + 1	...	(N − 1)N + 1
2	N + 2	2N + 2	...	(N − 1)N + 2
3	N + 3	2N + 3	...	(N − 1)N + 3
...	...	...	...	...
N	2N	3N	...	(N − 1)N + N

Ответ: $\frac{N}{2}(N^2-1)$

№ 11.3



Д. п. $O = BH \cap FD$. $\angle AFO = \angle DFC$ (верт.) $= \angle AFE$. Тогда $\triangle FHO = \triangle FHE$ по ~~стороне~~ катету HF и острому углу. Тогда $\triangle AEF = \triangle AOF$ по двум сторонам (AF и OF = EF) и углу между ними. Д. п. $DH_1 \perp AC$. Прямоугольные треугольники HEF, HOF и H_1DF подобны по двум углам.

Шифр: 2-11-25

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
по математике
2019/2020
Ленинградская область

Район г. Сосновый Бор

Школа МБОУ „СОШ №2 с углублённым изучением английского языка"

Класс 11 Б

ФИО Мекрюков Валентин Андреевич

(2-11-25)

6	7	8	9	10	Σ
7	0	0	7	0	14

Стр. № 1

Олимпиадная работа.

№ 11.6

Функция, описанная в условии, может иметь вид $f(x) = mx^{2k-1}$, где m и k — натуральные числа. Так как нам позволяется только вычитать и умножать данные функции, ~~любое~~ любая полученная функция будет иметь вид многочлена n-ой степени. ~~(n+1)~~ ~~Следово~~ ($f(x) = a_1 x^n + \ldots + a_0$). Тогда $f(x) = mx^{2k-1}$ — единственный возможный вид необходимой функции, т.к. иначе произойдёт смещение графика многочлена по оси y (от a_0) или x (разложение многочлена с ненулевыми младшими коэффициентами). Степень нечётна, т.к. иначе функция симметрична относительно оси y и $f(x) = f(-x)$, что противоречит условию.

Один из примеров: $f(x) = (x+1)(x+1) - (x^2+1) = 2x$.

№ 11.7

Несколько утверждений.

1. Сумма двух различных чисел a и b равна $2c_{ab}$, где c_{ab} — среднее арифметическое чисел a и b. Если c_{ab} — нечётное число, $c_{ab} \neq 1$, то $2c_{ab}$ не ~~делится~~ является степенью двойки. $c_{ab} \neq 1$, т.к. a и b — натуральные числа ($a, b \geq 1$).
2. Сумма нечётного и чётного числа нечётна, и потому не может являться степенью двойки. Поэтому раскраски рядов чётных и ряда нечётных нат. чисел независимы друг от друга, но подчиняются общим закономерностям.

(2-11-25)

Олимпиадная работа.

№ 11.7 (продолжение).

Собственно, решение.

Рассм. два ряда – чётных и нечётных чисел (см. п. 2).

I. Раскрасим нечётные числа поочерёдно. Тогда среднее арифметич. любых двух одинаково раскрашенных тоже стоит в ряду – и нечётно, т.е. их сумма – не степень двойки (см. п. 1). Иначе – раскрасить нельзя, т.к. бо́льшие числа будут дополняться до степеней двойки уже однозначно раскрашенными меньшими;

II. Рассмотрим ряд чисел $1\cdot 2^n$; $2\cdot 2^n$, $3\cdot 2^n$, ...,
Нечётные члены этого ряда однозначно раскрашиваются согласно I. Однако тогда нераскрашенными останутся числа ряда 2^{n+1}, $2\cdot 2^{n+1}$ и т.д. Ввиду неограниченности сверху значений n такая раскраска всех натуральных чисел, таким образом, невозможна.

Ответ: нет;

№ 11.8

Сумма двух рациональных чисел всегда рациональна; сумма двух иррациональных чисел всегда иррациональна, как и сумма рационального и иррационального чисел.

Пусть $\sin x + \cos y = a$, $\sin y + \cos x = b$. Тогда

$\sin x + \cos x + \sin y + \cos y = a + b$, где $a+b$ – положительное рациональное число. Значит, каждое из ~~ф~~ слагаемых слева рационально. Значит, $\sin x$ и $\cos x$ рациональны. Но рациональные числа можно представить в ~~виде~~ дроби вида $\frac{k}{p}$, где k и p – целые. Для положит. ~~ж~~ дроби k и p одного знака. Пусть они положительны. Тогда $m \sin x + n \cos x$ можно представить как $\frac{mk}{p} + \frac{nl}{q}$, что при $m = p$, $n = q$ даёт нат. ~~отве~~ результат.

ч. т. д.

№ 11.7 (дополнение).

<u>К пункту I</u>. Раскраска нескольких первых чисел ряда может быть однозначно опред. вручную:

1 $\varnothing$ 3 $(1+3=4)$, 3 $\varnothing$ 5 $(3+5=2^3)$ и т.д. (знак $\varnothing$ означает разные цвета): 1 $\varnothing$ 7, 7 $\varnothing$ 9, 5 $\varnothing$ 11 и т.д.

№ 11.9

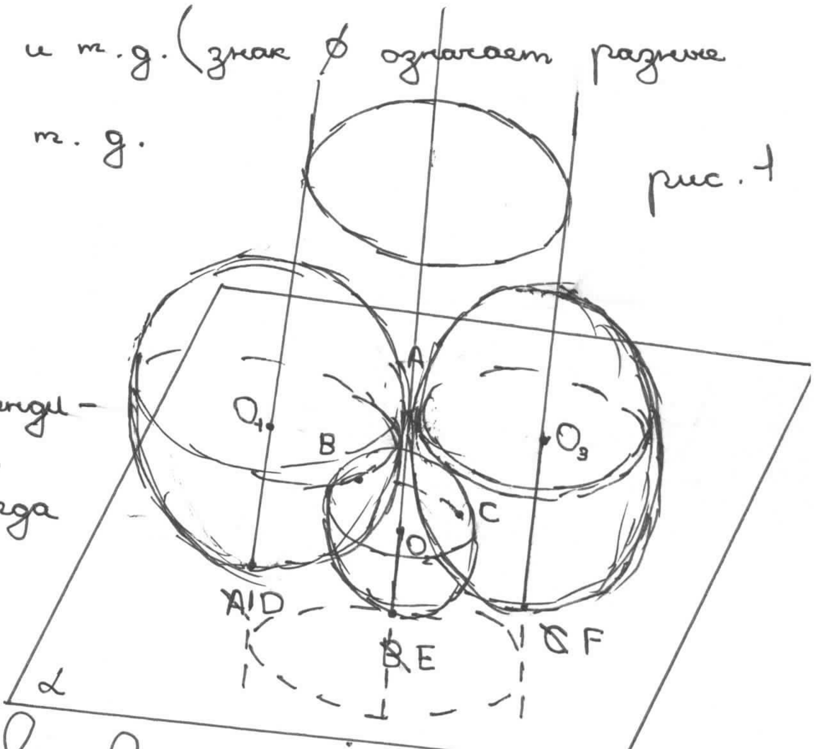


рис. 1

1. ~~Расст.~~ Радиусы, опущенные из центров сфер к плоскости, перпендикулярны к этой плоскости. Тогда построим бесконечный цилиндр, содержащий центры сфер и точки D, E, F (с образующими, содержащими соответствующие радиусы. Обозначим цилиндр γ. ~~Площадь~~ Его сечение, перпендикулярное к образующим, равно кругу, опис. около $\triangle DEF$.

2. Рассмотрим точку внешнего касания двух сфер. Она лежит на линии, соед. центры сфер. Тогда три точки касания и три центра сфер ~~обр~~ лежат в одной плоскости (O_1O_2 и O_2O_3 образуют плоскость, O_3O_3 лежит в этой плоскости по двум точкам, все точки отрезков O_mO_n лежат в плоскости по свойству прямой в плоскости). Рассмотрим полученный треугольник (см. рис. 2).

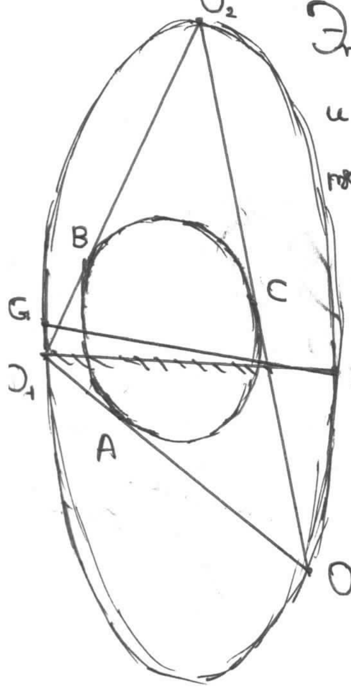
рис. 2

Расстояния $BO_2=O_2C$, $BO_1=AO_1$, $CO_3=O_3A$, т.к. это радиусы сфер. Но тогда B, C, A – точки касания сторон вписанной окружностью $\triangle O_1O_2O_3$ (по свойству касательных из одной точки). Т.к. такая окружность ~~(вписанная)~~ единственна, то она же – описанная около $\triangle ABC$. Значит, эта окружность лежит внутри $\triangle O_1O_2O_3$ и, следовательно, внутри

№ 11.9 (продолжение).

цилиндра γ (внутри сечения цилиндра γ плоскостью β, содержащей $\triangle O_1O_2O_3$).

3. Рассмотрим сечение цилиндра γ плоскостью β (см. рис. 3).



Это сечение – ~~элли~~ эллипс, т.к. цилиндр бесконечный и β не параллельна образующим (пересекает их в точках O_n). Малый диаметр GH эллипса равен диаметру опис. окружности $\triangle DEF$. Ни одна окружность, лежащая внутри эллипса, не ~~може~~ может иметь диаметра большего, чем малый диаметр эллипса. Окружность, содержащая A, B, C, лежит внутри эллипса по п. 2. Следовательно, её диаметр d_{ABC} меньше GH. $GH = d_{DFE}$ (см. выше). Следовательно:

$d_{ABC} < d_{DFE}$ $\quad \frac{d_{ABC}}{2} < \frac{d_{DFE}}{2}$ $\quad r_{ABC} < r_{DFE}$, где

r_{MNK} – радиус окружности, содержащей соответствующие точки (т.к. $r = \frac{d}{2}$).

Что и требовалось доказать.

№ 11.10

1. ~~За пять ходов Петя гарантированно будет знать $\frac{b}{a}$. Докажем это~~. При $a \neq 0$; $t \neq 0$:

$f(t)$ – не $f(t)$ из условия.

$f(t) = at^2 + bt + c$

$ax^2 + bx + c - \overset{f(t)}{\cancel{at}} = 0$ при $x = t$ и $x = -\frac{b}{a} - t$ ~~при положит. $(b+2at)$~~, т.к. тогда

$ax^2 + bx + c - f(t) = ax^2 + bx - at^2 - bt = 0$

$D = b^2 - 4a(-at^2 - bt) = b^2 + 4abt + 4a^2t^2 = (b+2at)^2$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm |b+2at|}{2a}$ Согласно теореме Виета для корней квадратного уравнения: $-t\left(\frac{b}{a} + t\right) = c - f(t)$

в:

Олимпиадная работа.

2-11-25

$\frac{b}{a} + t = \frac{f(t)}{t} - c/t$ $\qquad$ $\frac{b}{a} + ct = \frac{f(t)}{t} - t$

Таким образом, $\frac{f(t)}{t} - t$ при последовательных ~~беру~~ t (н-р, 1, 2 и т.д.) образуют арифметическую прогрессию с разностью, равной c. ~~Пусть~~ В случае, когда ~~Васе~~ могут быть даны даются два различных значения $f(t)$ для разных многочленов, последовательность содержит члены двух арифметических прогрессий.

Если Вася знает четыре последовательных члена этого ряда и свободный член c_f одного из многочленов, он может найти те члены, которые принадлежат одной прогрессии:

1. Если ~~ему из~~ Из k-го ~~первого~~ члена прогрессии вычесть n-ый и разделить разность на $(k-n)$, получится c_f. Тогда проделав эту операцию со всеми известными Васе значениями в ряду, Вася найдёт члены, принадлежащие прогрессии ~~со зн~~ с разностью c_f, если таких членов более одного (если их менее ~~одного~~, c_f не будет получен ни в одном из действий). Если же их менее одного, то Вася может получить c_g из разностей остальных членов ряда по алгоритму „см. выше" (таких разностей нужно больше одной, поэтому членов необходимо более трёх, включая возможно относящийся к другому ряду).

Следовательно, зная 5 значений, полученных от ~~Васи~~ Пети ($f(0)$ и $f(k)$, где k — четыре последовательных целых числа), Вася может вычислить c и $\frac{b}{a}$ для одного из загаданных многочленов.

Подставив теперь известные ему значения в ~~два~~ систему уравнений ~~вида~~:

$$\begin{cases} at^2 + bt + c = f(t) \\ \frac{b}{a} = const \end{cases}$$

~~(одно такое уравнение можно взять из~~

, где $f(t)$ — ~~один из~~ но ~~определённо относящееся к тому же ряду, что значений~~ $f(t$ взято из одного из членов прогрессии с разностью c и решив её относительно a и b; Вася будет знать все значения коэффициентов, a,

№ 11.10 (продолжение).

значит, будет знать сам многочлен, который и сообщит Пете, затратив, как указано выше 5 (и не меньше) ходов.

Ответ: 5.

Отдельно необходимо рассмотреть случай $a = 0$. Тогда многочлен принимает вид $f(x) = bx + c$. Последовательные значения $f(t) - t$ в этом случае также образуют ~~арифметич~~ прогрессию с разностью ~~b~~ c. ~~Тогда необходимые члены могут быть получены сравнением с нулевым членом~~, но обратных чисел. Следовательно, необходимо отдельно проверять последовательность $f(t)$: если в ней, после проверки по алгоритму, обнаружится прогрессия арифметическая, то $a = 0$ и коэффициенты вычисляются из двух уравнений вида $f(x) = bx + c$ (линейная система, единственное решение).